TD17

ENCORE DES DENSITÉS ET/OU FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

Exercice 1 **EML** 2023 Exercice 3.

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$[\![1, n]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Les parties II et III sont indépendantes mais utilisent les résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaires.

1. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x\ln(x) & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 & \end{array} \right.$.

- **a.** Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- **b.** La fonction h est-elle dérivable en 0.
- **c.** Déterminer les antécédents par h de 0.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $g(x) = -h(x) - h(1 - x)$. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie II - Des variables discrètes.

*Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **l'entropie** de X est, sous réserve d'existence :*

$$H(X) = -\sum_{x \in X(\Omega)} h\left(\mathbb{P}\left([X = x]\right)\right).$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{p_1, \cdots, p_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe et vaut

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i),$$

où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}\left([X = p_i]\right)$.

3. Dans cette question U est une variable alàatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer $H(U)$.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que $H(X) \leqslant \ln(2)$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. On pourra utiliser la question **2**.

5. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paranètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace probabilisé. Soit Z la variable aléatoire telle que

- $Z(\Omega) = \{0, 1\}$,

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

- L'événement $[Z=1]$ est réalisé si et seulement si l'événement "X_1+X_2 est impair" est réalisé.

On définit le réel p par $\mathbb{P}([Z=1])$.

a. Quelles sont les valeurs prises par X_1+X_2 ?

b. Démontrer que $p=p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$.

c. Vérifier que $1-2p=(1-2p_1)(1-2p_2)$.

6. Soit $p\in]0,1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellememt indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ et on considère la variable Z_n telle que

- $Z_n(\Omega)=\{0,1\}$,
- L'événement $[Z_n=1]$ est réalisé si et seulement si l'événement "S_n est impair" est réalisé.

a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable S_n ?

b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $1-2\mathbb{P}([Z_n=1])=(1-2p)^n$.
On pourra raisonner par récurrence.

c. Démontrer que $H(Z_n)\leqslant\ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III - Des variables à densités.

*Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, de densité f, on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty}h\circ f(t)dt$ converge absolument. L'**entropie** de X est alors :*

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}h\circ f(t)dt.$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a,b]$ où a et b sont des réels tels que $a<b$.

a. Démontrer que U admet une entropie.

b. Déterminer $H(U)$.

8. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, de densité f.

a. Justifier de la convergence de l'intégrale impropre $\int_{0}^{+\infty}tf(t)dt$ et déterminer sa valeur.

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X)=1-\ln(\lambda)$.

9. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ où $m\in\mathbb{R}$ et $\sigma>0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X.

a. Donner l'espérance et la variance de X. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\phi(t)dt$.

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X)=\frac{1+\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.

Exercice 2 **EDHEC** 2021 Exercice 1.

Soit la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x.y)=x^3+y^3-3xy.$$

Partie 1.

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b. Déterminer les points critiques de f.

3. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   b. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global.

Partie 2.

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x, 1).$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x possède une unique solution que l'on notera u_n.
6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.
   a. Dresser le tableau de variations de h^{-1}.
   b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   c. En déduire en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha$.

Exercice 3 D'après **ECRICOME** 2007.

On considère, sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par
$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y).$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature et la valeur.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right).$$
   a. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $f(t) \geqslant 1$.
   b. Vérifier que
$$g(x, y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$
   c. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 D'après **EML** 2011.

On considère les fonctions f et F définies par
$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x + \ln(x))\, e^{x-1} \end{array} \quad \text{et} \quad F : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)dt \end{array}$$

1. Étudier f.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$
$$G : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}} \end{array}.$$

3. Pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1 G(x, y)$ et $\partial_2 G(x, y)$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{\frac{x+y}{2}}$.

4. **a.** Montrer que f est bijective.
   b. Établir que, pour tout $(x,y)\in]0,+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si
$$x=y \quad \text{et} \quad x+\ln(x)=e.$$
5. Montrer que l'équation $x+\ln(x)=e$ d'inconnue $x\in]0,+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α et montrer que $1<\alpha<e$.
6. En déduire que G admet comme unique point critique le point (α,α) et montrer que la matrice hessienne au point (α,α) s'écrit
$$H=\nabla^2(G)(\alpha,\alpha)=\begin{pmatrix} f'(\alpha)-\frac{e^\alpha}{2} & -\frac{e^\alpha}{2} \\ -\frac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha)-\frac{e^\alpha}{2}\end{pmatrix}=f'(\alpha)\mathrm{I}_2-\frac{e^\alpha}{2}M,$$
où $M=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.
7. **a.** Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre de M associé à λ. Montrer que
$$HX=\left(f'(\alpha)-\frac{e^\alpha}{2}\lambda\right)X$$
et en déduire que
$$\mathrm{Sp}(H)=\left\{f'(\alpha),f'(\alpha)-e^\alpha\right\}.$$
   b. Montrer que $f'(\alpha)>e^\alpha$.
   c. En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.

Exercice 5 D'après **EDHEC** 2005.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=xe^{x(y^2+1)}.$$
1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. **a.** Déterminer les dérivées partielles premières de f.
   b. En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A=(-1,0)$.
3. **a.** Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   b. Montrer qu'effectivement f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
4. **a.** Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)\geqslant xe^x$.
   b. En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question **2.b** est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.